Révisions
Logique combinatoire

lundi 22 février 2010

Fonctions logiques de base

- OU
- ET
- NON-OU (NOR)
- NON-ET (NAND)
- OU Exclusif
- NOR Exclusif

Georges BOOLE

Algèbre de Boole : relations particulières

Algèbre de Boole : théorème de DE MORGAN

Algèbre de Boole : Recherche d’équation

Algèbre de Boole : création d’un logigramme

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

Fonctions logiques de base

- Fonction ET

e1	e2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Pour que la sortie S soit à 0 :
  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 0 →
- Pour que la sortie S soit à 1 :
  Il faut que les entrées e1 ET e2 soient à 1 →

- Equation booléenne:

$$\boxed{S = e1 . e2}$$

Fonctions logiques de base

- Fonction ET

e1	e2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Pour que la sortie S soit à 0 :
  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 0 →
- Pour que la sortie S soit à 1 :
  Il faut que les entrées e1 ET e2 soient à 1 →

•Equation booléenne:

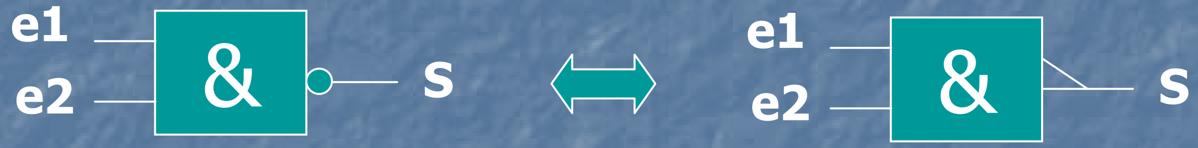
$$\boxed{S = e1 \,.\, e2}$$

← Menu

Diapo suiv

Fonctions logiques de base

- Fonction NON-ET (NAND)



e1	e2	S	
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

- Pour que la sortie S soit à 1 :

  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 0 ➔

- Pour que la sortie S soit à 0 :

  Il faut que les entrées e1 ET e2 soient à 1 ➔

•Equation booléenne:

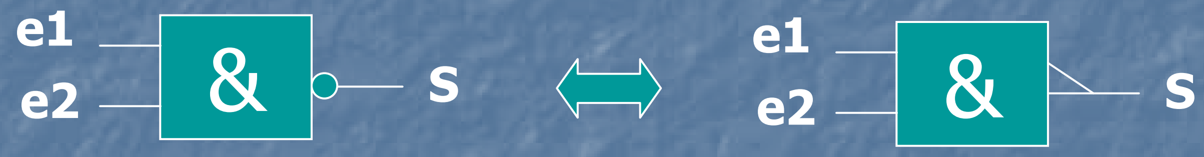
$$S = \overline{e1 \, . \, e2}$$

$$\Updownarrow$$

$$S = \overline{e1} + \overline{e2}$$

Fonctions logiques de base

- Fonction NON-ET (NAND)



e1	e2	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Pour que la sortie S soit à 1 :

  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 0 ➔

- Pour que la sortie S soit à 0 :

  Il faut que les entrées e1 ET e2 soient à 1 ➔

•Equation booléenne:

$$\boxed{S = \overline{e1 \, . \, e2}}$$

$$\Updownarrow$$

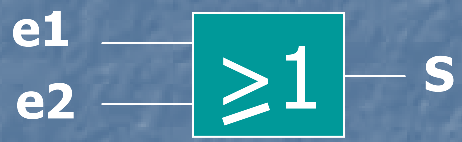
$$\boxed{S = \overline{e1} + \overline{e2}}$$

← Menu

Diapo suiv

Fonctions logiques de base

- Fonction OU



- Pour que la sortie S soit à 0 :
  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 0 ➔

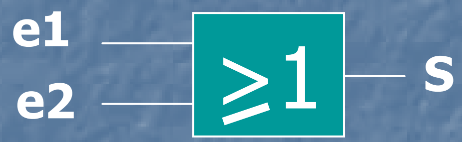
- Pour que la sortie S soit à 1 :
  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 1 ➔

e1	**e2**	**S**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

•Equation booléenne: $\boxed{S = e1 + e2}$

Fonctions logiques de base

Fonction OU



- Pour que la sortie S soit à 0 :
  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 0 ➔
- Pour que la sortie S soit à 1 :
  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 1 ➔

e1	e2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

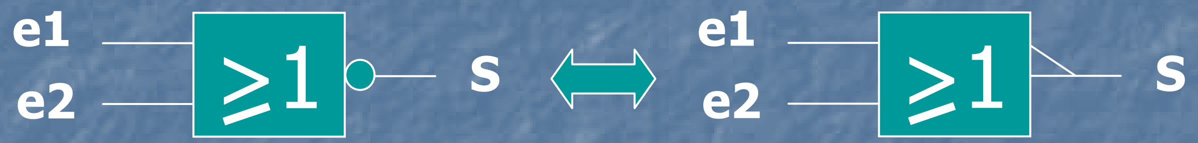
- Equation booléenne: $\boxed{S = e1 + e2}$

← Menu

Diapo suiv

Fonctions logiques de base

- Fonction NON-OU (NOR)



• Pour que la sortie S soit à 1 :

Il faut que les entrées e1 ET e2 soient à 0 ➔

• Pour que la sortie S soit à 0 :

Il suffit qu'au moins une entrée soit à 1

e1	e2	S	
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

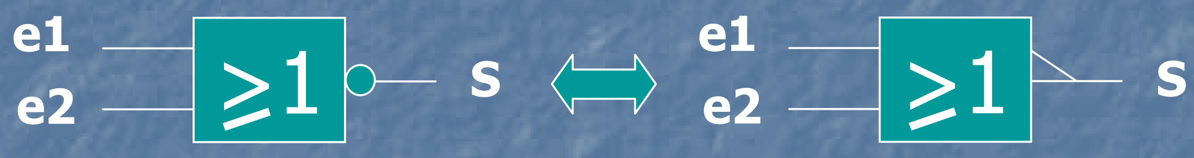
•Equation booléenne:

$$S = \overline{e1 + e2}$$

$$S = \overline{e1} \,.\, \overline{e2}$$

Fonctions logiques de base

- Fonction NON-OU (NOR)



- Pour que la sortie S soit à 1 :

  Il faut que les entrées e1 ET e2 soient à 0 ➔

- Pour que la sortie S soit à 0 :

  Il suffit qu'au moins une entrée soit à 1

e1	e2	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

•Equation booléenne:

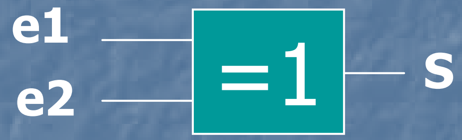
$$\boxed{S = \overline{e1 + e2}}$$

$$\boxed{S = \overline{e1} \,.\, \overline{e2}}$$

← Menu

Fonctions logique de base

Fonction OU Exclusif



e1	e2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Pour que la sortie soit à 1 :

  Il faut que e1 OU e2 soit à 1 mais pas les 2

- Pour que la sortie soit à 0 :

  Il faut que les entrées soient au même niveau logique

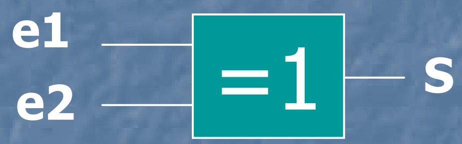
$$\boxed{S = e1 \oplus e2} \Leftrightarrow \boxed{S = \overline{e1}.e2 + e1.\overline{e2}}$$

Intérêt :

Diapo suiv

Fonctions logique de base

- Fonction OU Exclusif



e1	e2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

• Pour que la sortie soit à 1 :

Il faut que e1 OU e2 soit à 1 mais pas les 2

• Pour que la sortie soit à 0 :

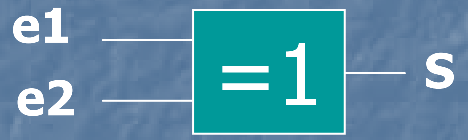
Il faut que les entrées soient au même niveau logique

$$S = e1 \oplus e2 \Leftrightarrow S = \overline{e1}.e2 + e1.\overline{e2}$$

Intérêt : Détecter l'inégalité entre e1 et e2

Fonctions logique de base

- Fonction OU Exclusif



e1	e2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Pour que la sortie soit à 1 :

  Il faut que e1 OU e2 soit à 1 mais pas les 2

- Pour que la sortie soit à 0 :

  Il faut que les entrées soient au même niveau logique

$\boxed{S = e1 \oplus e2}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{S = \overline{e1}.e2 + e1.\overline{e2}}$

Intérêt : Détecter l'inégalité entre e1 et e2

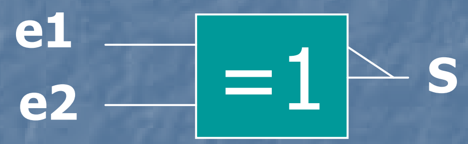
← Menu

Diapo suiv

Fonctions logique de base

NOR Exclusif = $\overline{\textit{OU Exclusif}}$

Fonction NOR Exclusif



e1	e2	S	
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

- Pour que la sortie soit à 0 :

  Il faut que e1 OU e2 soit à 1 mais pas les 2

- Pour que la sortie soit à 1 :

  Il faut que les entrées soient au même niveau logique

$S = \overline{e1 \oplus e2}$ ⟺ $S = \overline{\overline{e1}.e2 + e1.\overline{e2}}$ ⟺ $S = \overline{e1}.\overline{e2} + e1.e2$

Intérêt :

Fonctions logique de base

NOR Exclusif = $\overline{\textit{OU Exclusif}}$

Fonction NOR Exclusif

e1
e2
=1
S

e1	e2	S	
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

- Pour que la sortie soit à 0 :

  Il faut que e1 OU e2 soit à 1 mais pas les 2

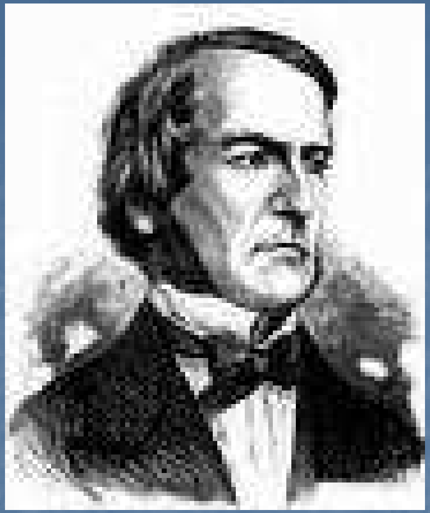
- Pour que la sortie soit à 1 :

  Il faut que les entrées soient au même niveau logique

$S = \overline{e1 \oplus e2}$ ⟺ $S = \overline{\overline{e1}.e2 + e1.\overline{e2}}$ ⟺ $S = \overline{e1}.\overline{e2} + e1.e2$

Intérêt : Détecter l'identité entre e1 et e2

- **Boole, George** (1815-1864), mathématicien et logicien anglais.



- Il décrit un système algébrique qui sera plus tard connu sous le nom d'algèbre booléenne. Dans ce système, les propositions logiques sont indiquées par des symboles et peuvent être exécutées par des opérateurs mathématiques abstraits qui correspondent aux lois de la logique.

←

Algèbre logique

- Relations particulières

$a . b = b . a$	$a + 0 = a$	$a . 0 = 0$
$a + b = b + a$	$a + a = a$	$a . a = a$
$a + (b + c) = (a + b) + c = b + (a + c)$	$a + 1 = 1$	$a . 1 = a$
$a (b + c) = a . b + a . c$	$a + \overline{a} = 1$	$a . \overline{a} = 0$

Algèbre logique

- Théorème de de Morgan

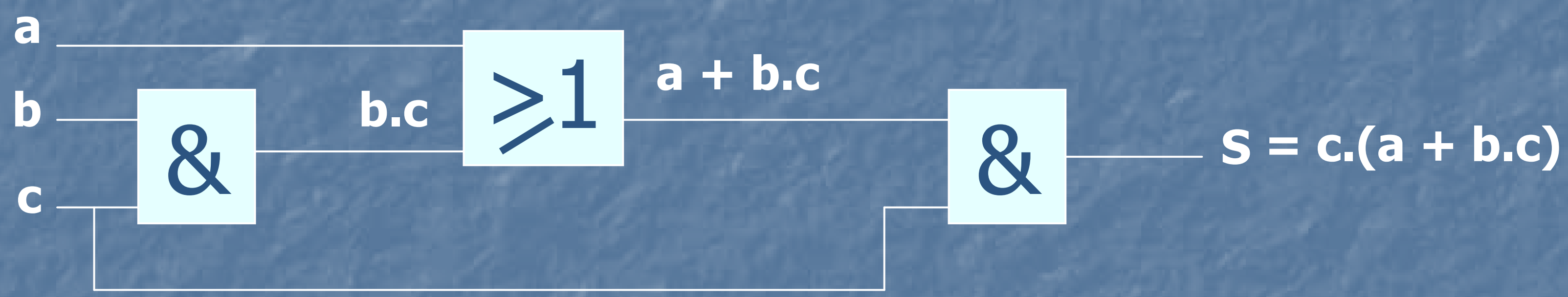
$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Application principale :
Transformation d'une somme en produit et inversement

Algèbre logique

- Exemple d'application : Recherche d'équation



Simplification :

S = a.c + b.c.c

S = a.c + b.c

S = c (a + b)

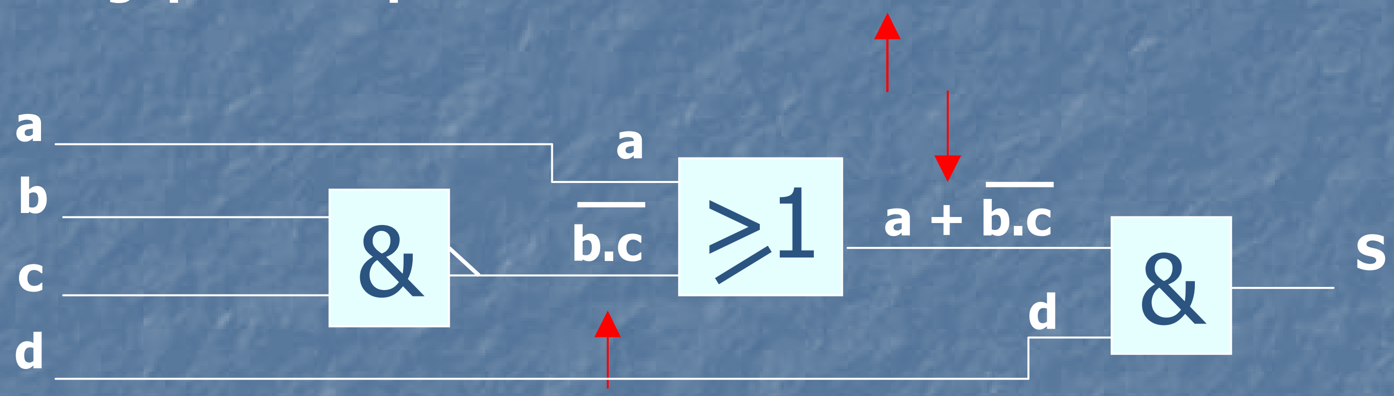
$\boxed{S = c\,(a + b)}$

← Menu

Algèbre logique

- Exemple d'application : création d'un logigramme

Equation logique de départ : $S = (a + \overline{b.c}).d$



Règle de construction : Toujours partir de la sortie, rechercher l'opérateur logique qui sépare l'équation

← Menu

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

Etude d'un exemple :
définition d'une équation à partir d'une table de vérité

d	c	b	a	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

1 – Construire le tableau

d.c \ b.a	00	01	11	10
00	**0**	**0**	**1**	**1**
01	**0**	**1**	**0**	**1**
11				
10	**1**	**1**		

d	c	b	a	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

2 – Compléter le tableau

d.c \ b.a	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

d	c	b	a	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Ajouter des 1 ou 0 afin de pouvoir réaliser des regroupements maximums

← Menu

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

3 – Regrouper les cases (groupe de 2^n)

d.c \ b.a	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

d	c	b	a	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

← Menu

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

4 – Etablir l'équation finale

d.c \ b.a	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

d	c	b	a	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

$S = \bar{c}.b + d + \bar{a}.b + a.\bar{b}.c$

Recommencer

← Menu

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

1 – Construire le tableau

Etude d'un exemple : définition d'une équation à partir d'une équation logique

$$S = a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c + a.b.d$$

c.d

a.b	00	01	11	10
00				
01				
11	**1**	**1**	**1**	**1**
10			**1**	**1**

← Menu

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

2 - Regrouper

c.d

a.b	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10			1	1

$$S = a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c + a.b.d$$

Algèbre logique

- Tableau de Karnaugh :

3 – Définir l'équation finale

a.b \ c.d	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1	1	1
10			1	1

$S = a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c + a.b.d$

$S = a.b + a.c$

$\boxed{S = a.(b + c)}$

Recommencer

← Menu